ALTERNATING SIGN MATRICES : A PROGRESS REPORT(Groups and Combinatorics)

岡田, 聡一

数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 157-167

ALTERNATING SIGN MATRICES : A PROGRESS REPORT

名古屋大学・多元数理科学研究科　岡田 聡一　(Soichi Okada)

Alternating sign matrix の数え上げ問題に関して,

(1) alternating sign matrix の個数に対する予想の証明
(2) 対称性をもつ alternating sign matrix の母関数の特殊値 (2-数え上げ)

について, 報告する.

§1. Alternating Sign Matrix.

W. Mills-D. Robbins-H. Rumsey は, [MRR1], [RR] において, 平面分割の数え上げ問題, 正方行列の行列式をその小行列式の有理関数として表す公式と関連して, alternating sign matrix の概念を導入した.

定義 1.1. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ は, 次の条件を満たすとき, **alternating sign matirx** という.

(A1) $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$
(A2) 任意の i, j に対して, $\sum_{k=1}^{j} a_{ik} = 0$ または 1.
(A3) 任意の i, j に対して, $\sum_{k=1}^{i} a_{kj} = 0$ または 1.
(A4) 任意の i, j に対して, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} = 1$.

n 次 alternating sign matrix 全体の集合を $\mathcal{A}_n$ と表わす.

定義の条件 (A1), (A4) の下で, 条件 (A2), (A3) は,

(A2') A の各行は, 0 を除くと, 1 と -1 が $1, -1, 1, \cdots, -1, 1$ と交互に現れる.
(A3') A の各列は, 0 を除くと, 1 と -1 が $1, -1, 1, \cdots, -1, 1$ と交互に現れる.

と言い換えることができる.

n 次置換行列全体の集合 (n 次対称群) を $\mathfrak{S}_n$ とすると, -1 を成分にもたない alternating sign matrix は置換行列に他ならないから,

$$\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}_n.$$

例えば, $\mathcal{A}_1 = \mathfrak{S}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathfrak{S}_2$ であるが,

$$\mathcal{A}_3 = \mathfrak{S}_3 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mills-Robbins-Rumnsey は, $\mathcal{A}_n$ の元の個数に関して予想を提出したが, この予想は, 最近, D. Zeilberger, G. Kuperberg によって証明された.

定理 1.2. [Z, K]

$$\#\mathcal{A}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}.$$

§2 では，Kuperberg による証明を紹介する．

位数 8 の正 2 面体群 D_8 は，自然に n 次正方行列全体の集合に作用している．このとき，alternating sign matrix の条件 (A1), (A2'), (A3'), (A4) から，D_8 が $\mathcal{A}_n$ に作用していることがわかる．従って，D_8 の部分群 H に対して，H-不変な alternating sign matrix 全体の集合 $\mathcal{A}_n^H$ が考えられる．Alternating sign matrix A に対して，

$$S(A) = \{(i,j) : a_{ij} = -1\}$$

とおく．A が H-不変ならば，$S(A)$ は H の作用で保たれるから，その H-軌道の個数 $\#(S(A)/H)$ が定まる．そこで，母関数

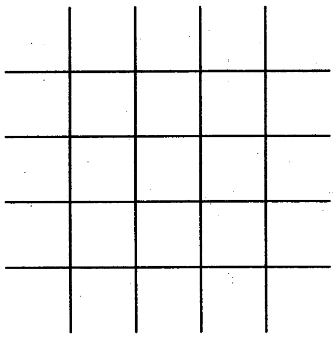
$$A_n^H(x) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} x^{\#S(A)/H}$$

を考える．§3 では，D_8 のいくつかの部分群 H に対するこの母関数の特殊値 $A_n^H(2)$ について述べる．

§2. Alternating sign matrix と 6 vertex model.

Kuperberg [K] は，isotropic 6-vertex model の分配関数を用いて，alternating sign matrix の個数に関する定理 1.2 を証明した．ここでは，彼の証明の概略を紹介する．

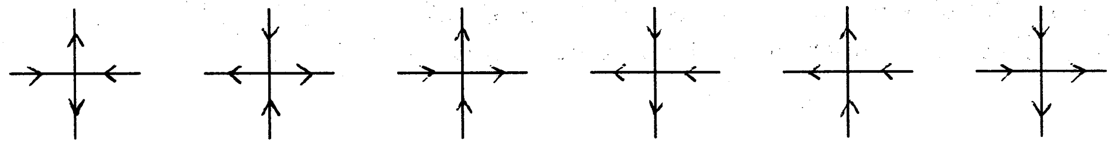
まず，n 本の縦線と n 本の横線が交わってできる次のようなグラフ S_n を考える．(下図では，$n = 4$ である．)



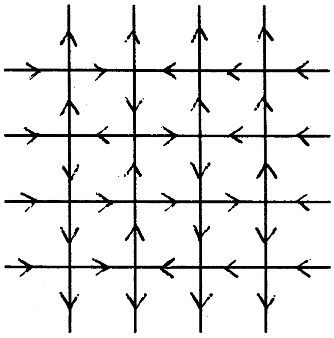
このグラフの各辺に矢印を次の条件を満たすように配置したもの全体の集合を $\mathcal{C}_n$ とおく．

(1) 上端の辺の矢印は上向き，下端の辺の矢印は下向き，左端の辺の矢印は右向き，右端の辺の矢印は左向きである．

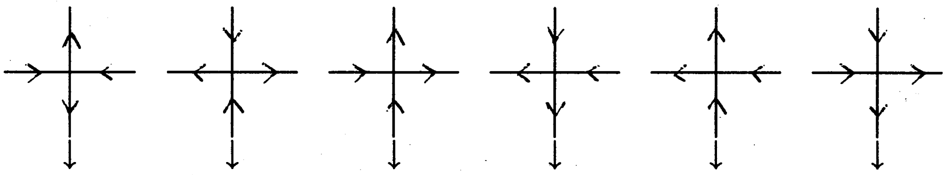
(2) 端点以外の各頂点において許される矢印の配置は次の 6 通りである．



例えば,

$\sigma =$ 

は許される矢印の配置である．このような矢印の配置 σ が与えられたとき，n^2 個の交点での矢印の配置に応じて，



1　　-1　　0　　0　　0　　0

と対応させることによって，n 次正方行列 A を作る．

命題 2.1. この対応 $\sigma \mapsto A$ は $\mathcal{C}_n$ から $\mathcal{A}_n$ への全単射である．

この写像の逆写像は，つぎのようにして与えられる．Alternating sign matrix $A \in \mathcal{A}_n$ に対して，$(n+1)$ 次正方行列 $A^* = (a^*_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ を

$$a^*_{ij} = i + j - 2 - 2 \sum_{1 \le k \le i} \sum_{1 \le l \le j} a_{kl}$$

によって定義する．このとき，A^* の各行，各列の間に線をひいてグラフ S_n を作り，各辺に矢印を次の条件に従って配置する．

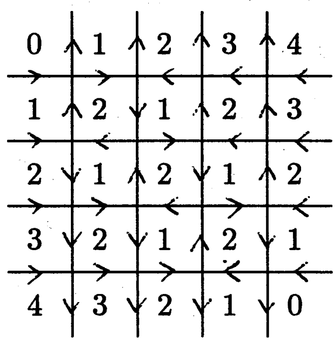
(1) $a^*_{i,j} > a^*_{i,j+1}$ ならば，その間の辺に下向きの矢印 $\downarrow$ を配置する．
(2) $a^*_{i,j} < a^*_{i,j+1}$ ならば，その間の辺に上向きの矢印 $\uparrow$ を配置する．
(3) $a^*_{i,j} > a^*_{i+1,j}$ ならば，その間の辺に左向きの矢印 $\leftarrow$ を配置する．
(4) $a^*_{i,j} < a^*_{i+1,j}$ ならば，その間の辺に右向きの矢印 $\rightarrow$ を配置する．

例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\sigma =$ 

次に，矢印の配置 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ に対して，その重み $W(\sigma)$ を次のように対応させる．各交点において，u をパラメーターとする局所的な重みを

$$W\left(\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ \rightarrow & + & \leftarrow \\ & \downarrow & \end{array}\middle|\, u\right) = -q^{-u/2}, \qquad W\left(\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \leftarrow & + & \rightarrow \\ & \uparrow & \end{array}\middle|\, u\right) = -q^{u/2}$$

$$W\left(\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ \rightarrow & + & \rightarrow \\ & \uparrow & \end{array}\middle|\, u\right) = [u-1], \qquad W\left(\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \leftarrow & + & \leftarrow \\ & \downarrow & \end{array}\middle|\, u\right) = [u-1]$$

$$W\left(\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ \leftarrow & + & \leftarrow \\ & \uparrow & \end{array}\middle|\, u\right) = [u], \qquad W\left(\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \rightarrow & + & \rightarrow \\ & \downarrow & \end{array}\middle|\, u\right) = [u]$$

によって定義する．ここで，

$$[u] = \frac{q^{u/2} - q^{-u/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

である．このとき，第 i 行，第 j 列にある頂点におけるパラメーターを $x_i - y_j$ とした局所的な重みを掛け合わせたものを $W(\sigma)$ と定義する．つまり，

$$w(\sigma) = \prod_{i,j=1}^{n} W\left(\begin{array}{ccc} & | & \\ - & + & - \\ & | & \end{array}\middle|\, x_i - y_j\right)$$

である．そして，

$$Z_n(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_n} W(\sigma)$$

と定義し，これを分配関数と呼ぶ．

命題 2.1 の対応を用いると，

命題 2.2.

$$A_n(x) = (-1)^n q^{n/4} (q^{1/4} + q^{-1/4})^{n(n-1)} Z_n\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}; 0, \cdots, 0\right).$$

ここで，

$$x = (q^{1/4} + q^{-1/4})^2$$

である．

一方，分配関数 Z_n 自体は，A. Izergin-V. Korepin によって求められている．

定理 2.3. [KBI]

$$\begin{aligned} &Z_n(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) \\ &= (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n q^{(y_i - x_i)/2} \prod_{i,j=1}^n [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\prod_{1 \le j < i \le n}[x_i - x_j] \prod_{1 \le i < j \le n}[y_i - y_j]} \\ &\quad \times \det\left(\frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}\right)_{1 \le i,j \le n}. \end{aligned}$$

従って，定理 1.2 を証明するには，$q = e^{4\pi\sqrt{-1}/3}$ のときの $Z_n(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}; 0, \cdots, 0)$ を計算しなければならない．ところが，定理 2.3 において，$x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{2}$, $y_1 = \cdots = y_n = 0$ を代入すると，分母が 0 となる．そこで，代わりに，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Z_n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} + 2\varepsilon, \cdots, \frac{1}{2} + n\varepsilon; 0, -\varepsilon, -2\varepsilon, \cdots, -(n-1)\varepsilon \right)$$

を計算する．ここで，$x_i = \frac{1}{2} + i\varepsilon$, $y_i = -(i-1)\varepsilon$ のときの行列式

$$\det \left(\frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]} \right)_{1 \le i,j \le n} = \det \left(\frac{-3}{s^{i+j-1} + 1 + s^{-i-j+1}} \right)$$

（ただし，$s = q^{\varepsilon}$）は，次の補題で $t = s^3$ とすることによって計算できる．

補題 2.4.

$$\begin{aligned} &\det \left(\frac{s^{(i+j-1)/2} - s^{-(i+j-1)/2}}{t^{(i+j-1)/2} - t^{-(i+j-1)/2}} \right)_{1 \le i,j \le n} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} (t^{1/2} - t^{-1/2})^{n(n-1)/2} \prod_{1 \le j < i \le n} (t^{(i-j)/2} - t^{-(i-j)/2}) \\ &\quad \times \prod_{i,j=1}^{n} \frac{s^{1/2} t^{(i-j)/2} - s^{-1/2} t^{(j-i)/2}}{t^{(i+j-1)/2} - t^{-(i+j-1)/2}}. \end{aligned}$$

最後に，Zeilberger [Z] の証明に触れておく．正整数 c_{ij} を

$$\begin{array}{ccccc} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & & & \\ c_{n,1} & & & & \end{array}$$

の形に並べたもので，条件

$$1 \le c_{i,j} \le j, \quad c_{i,j} \le c_{i,j+1}, \quad c_{i,j} \ge c_{i+1,j}$$

を満たすものを n-Magog triangle と呼び，その全体を $\mathcal{B}_n$ と表す．このとき，

$$\#\mathcal{B}_n = \mathrm{CT} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - 2x_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(x_j + x_i - 1)}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{2n-i-1} \overline{x_i}^{2n+1} \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)} \right\}$$

$$\#\mathcal{A}_n = \mathrm{CT} \left\{ \frac{\Phi_n(x_1, \cdots, x_n)}{\prod_{i=1}^{n} x_i^n \overline{x_i}^{n+i+1} \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)(1 - \overline{x_i} x_j)} \right\}$$

が示される．ここで，$\overline{x_i} = 1 - x_i$ であり，

$$\begin{aligned} &\Phi_n(x_1, \cdots, x_n) \\ &= (-1)^n \sum_{w \in W(B_n)} \mathrm{sgn}(w) w \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^n \overline{x_i}^{n-i} \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i \overline{x_j})(1 - \overline{x_i x_j}) \right] \end{aligned}$$

であり，B_n 型 Weyl 群 $W(B_n)=\mathfrak{S}_n\cdot(\mathbb{Z}_2)^n$ は n 変数多項式環に，対称群の部分は変数の置換として，$(\mathbb{Z}_2)^n$ の部分は $x_i\mapsto 1-x_i$ の形で作用する．また，CT は定数項を表す．論文 [Z] の大部分は，上の 2 つの定数項が一致することの証明に費やされている．一方，n-Magog triangle と totally symmetric self-complementary plane partition との間には全単射があるので，G. Andrews の結果 [A] を用いると，

$$\#\mathcal{B}_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$$

である．Zeilberger は，このようにして，定理 1.2 を証明した．

注意. 次の 3 つの集合の元の個数はどれも

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$$

に等しい．しかし，具体的な全単射は構成されていない．

(1) n 次 alternating sign matrix の全体 $\mathcal{A}_n$
(2) $2n\times 2n\times 2n$ の立方体に対する totally symmetric self-complementary plane partition 全体
(3) すべての成分が n 以下である descending plane parition 全体

§3. 対称性をもつ alternating sign matrix.

この節では，2 面体群 D_8 の部分群 H に対して，H-不変な alternating sign matrix の母関数の特殊値

$$A_n^H(2)=\sum_{A\in\mathcal{A}_n^H}2^{\#(S(A)/H)}$$

について考える.（$\mathcal{A}_n^H$ の元の個数 $A_n^H(1)$ については，いくつかの予想がある．これらの予想については，[R] を参照.）対角線に関する折り返しを t, 中心に関する 90° の回転を r と表すと，D_8 は t と r で生成され,

$$t^2=1,\quad r^4=1,\quad tr=r^3t.$$

2 面体群 D_8 の部分群 H と H' が共役ならば，明らかに $A_n^H(x)=A_n^{H'}(x)$ だから，D_8 の次の部分群を考えれば十分である．

(1) $H_1=\{1\}$
(2) $H_2=\langle rt\rangle$
(3) $H_3=\langle t\rangle$
(4) $H_4=\langle r^2\rangle$
(5) $H_5=\langle rt,r^3t\rangle$
(6) $H_6=\langle t,r^2t\rangle$
(7) $H_7=\langle r\rangle$
(8) $H_8=D_8$

$H=\{1\}$, $\langle rt\rangle$, $\langle rt,r^3t\rangle$ の場合には，monotone triangle の母関数を考えることによって，$A_n^H(2)$ を求めることができる．

定義 3.1.

$$T = \begin{array}{ccccccccc} & & & & t_{11} & & & & \\ & & & t_{21} & & t_{22} & & & \\ & & t_{31} & & t_{32} & & t_{33} & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ t_{n1} & & t_{n2} & & \cdots & & \cdots & & t_{nn} \end{array}$$

は次の条件をみたすとき，**monotone triangle** であるという．

(T1) T の各行は狭義単調増加である．

(T2) 任意の $1 \le j < i \le n-1$ に対して，$t_{i+1,j} \le t_{i,j} \le t_{i+1,j+1}$.

単調増加列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して，α を最下行とする monotone triangle の全体を $\mathcal{M}(\alpha)$ とする．Monotone triangle $T = (t_{ij})$ に対して，

$$\begin{aligned} s(T) &= \#\{(i,j) : t_{i+1,j} < t_{ij} < t_{i+1,j+1}\}, \\ x^T &= x_1^{s_1} x_2^{s_2 - s_1} \ldots x_n^{s_n - s_{n-1}} \end{aligned}$$

とおく．ただし，s_i は第 i 行の成分の和である．

Alternating sign matrix A が与えられたとき，行列 $B = (b_{ij})$ を $b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{kj}$ によって定義する．すると，alternating sign matrix の定義から，B は 0-1 行列であり，i 行目にある 1 の個数は i 個である．従って，triangle $T = (t_{ij})$ を $b_{i,t_{ij}} = 1$ によって，定義できる．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

のとき，

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 1 & & 2 & & 4 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

となる．

命題 3.2. 上の対応 $A \mapsto T$ は $\mathcal{A}_n$ から $\mathcal{M}(1, 2, \cdots, n)$ への全単射であり，

$$\#S(A) = s(T).$$

命題 3.3. 長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$\sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda_n, \lambda_{n-1}+1, \cdots, \lambda_1+n-1)} 2^{s(T)} x^T = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i + x_j) \cdot s_\lambda(x_1, \cdots, x_n).$$

ここで，s_λ は λ に対応する Schur 関数である．

$H = \{1\}$ のときは，命題 3.3 において，$\lambda = (1, \cdots, 1)$ ととり，$x_1 = \cdots = x_n = 1$ とおけばよいから，

定理 3.4. [MRR]

$$A_n(2) = 2^{n(n-1)/2}$$

$H = \langle rt \rangle$ のとき,

$$\mathcal{A}_n^{H_2} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n : a_{i,j} = a_{n+1-i,j}\},$$

つまり, H-不変な alternating sign matrix とは上下対称なものに他ならない. alternating sign matrix の条件 (A3') より, n が偶数ならば, H-不変な alternating sign matrix は存在しない. そこで, $n = 2m+1$ が奇数のときを考える. 命題 3.1 の全単射 $A \mapsto T$ において T の上から m 行を取り出してできる monotone triangle を $\overline{T}$ とすると,

命題 3.5. 対応 $A \to \overline{T}$ は, $\mathcal{A}_{2m+1}^{H_2}$ から $\mathcal{M}(2,4,6,\cdots,2m)$ への全単射であり,

$$\#(S(A)/H_2) = s(T) + m.$$

が得られる.

命題 3.3 において, $\lambda = (m+1, m, \cdots, 3, 2)$ ととると,

$$s_{(m+1,m,\cdots,3,2)}(x_1,\cdots,x_m) = (x_1\cdots x_m)^2 \prod_{1\le i<j\le m}(x_i + x_j)$$

だから,

定理 3.6.

$$A_n^{H_2}(2) = \begin{cases} 2^{m^2} & (n = 2m+1 \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$H = \langle rt, r^3t \rangle$ のとき,

$$\mathcal{A}_n^{H_5} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n : a_{i,j} = a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,n+1-j}\}.$$

このときは, Jockusch-Propp による antisymmetric monotone triangle の 2-数え上げを利用する.

定義 3.7. Monotone triangle $T = (t_{ij})$ は

$$t_{i,j} + t_{i,i-j+1} = 0 \quad (1 \le j \le i \le n)$$

を満たすとき, antisymmetric であるという.

正整数の単調増加列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ に対して, 最下行が $(-\alpha_m, \cdots, -\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ である antisymmetric monotone triangle 全体の集合を $\mathcal{E}(\alpha)$ とおき, 最下行が $(-\alpha_m, \cdots, -\alpha_1, 0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ である antisymmetric monotone triangle 全体の集合を $\mathcal{O}(\alpha)$ とおく. また, antisymmetric monotone triangle T に対して, T の正の成分のうちで, すぐ上の行に現れていないものの個数を $u(T)$ とする. 例えば,

$$T = \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & -1 & & 1 & & \\ & -3 & & 0 & & 3 & \\ -4 & & -3 & & 3 & & 4 \end{array}$$

のとき, $u(T) = 3$ である. 命題 3.5 の全単射 $A \mapsto \overline{T}$ において, T の成分から一斉に $m+1$ を引いてできる monotone triangle を $\widetilde{T}$ とする.

命題 3.8.

(1) $n=4k+1$ のとき，対応 $A \mapsto \widetilde{T}$ は $\mathcal{A}_{4k+1}^{H_5}$ から $\mathcal{E}(1,3,\cdots,2k-1)$ への全単射であり，

$$\#S(A)/H_5 = u(\widetilde{T})+k$$

である．

(2) $n=4k+3$ のとき，対応 $A \mapsto \widetilde{T}$ は $\mathcal{A}_{4k+3}^{H_5}$ から $\mathcal{O}(2,4,\cdots,2k)$ への全単射であり，

$$\#S(A)/H_5 = u(\widetilde{T})+k+1$$

である．

定理 3.9. [JP] $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ に対して，

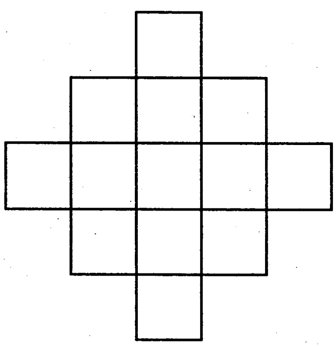
$$\sum_{T\in\mathcal{E}(\alpha)} 2^{u(T)} = 2^{k^2} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{\alpha_j-\alpha_i}{j-i} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{\alpha_i+\alpha_j-1}{i+j-1}$$
$$\sum_{T\in\mathcal{O}(\alpha)} 2^{u(T)} = 2^{k^2} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{\alpha_j-\alpha_i}{j-i} \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{\alpha_i+\alpha_j-1}{i+j-1}$$

この定理を用いると，

定理 3.10.

$$\mathcal{A}_n^{H_5}(2) = \begin{cases} 2^{(3k^2+k)/2} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{2i+2j-3}{i+j-1} & (n=4k+1 \text{ のとき}) \\ 2^{(3k^2+k+2)/2} \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k+3 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

M. Ciucu は，次のようなグラフの完全マッチング（に対称性を課したもの）を数え上げることによって，$H=\langle r\rangle, \langle r^2\rangle$ の場合に $A_n^H(2)$ を求めている．



定理 3.11. [C2]

$$A_n^{H_4}(2) = \begin{cases} 2^{3k^2-3k} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{2i+2j-3}{i+j-1} \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k\ \text{のとき}) \\ 2^{3k^2-k} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{2i+2j-3}{i+j-1} \prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k+1\ \text{のとき}) \\ 2^{3k^2+k} \left(\prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1}\right)^2 & (n=4k+2\ \text{のとき}) \\ 2^{3k^2+3k+1} \left(\prod_{1\le i\le j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1}\right)^2 & (n=4k+3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$A_n^{H_7}(2) = \begin{cases} 2^{(3k^2-k)/2} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k\ \text{のとき}) \\ 2^{(3k^2+k)/2} \prod_{1\le i<j\le k} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k+1\ \text{のとき}) \\ 0 & (n=4k+2\ \text{のとき}) \\ 2^{(3k^2+3k+2)/2} \prod_{1\le i<j\le k+1} \frac{2i+2j-1}{i+j-1} & (n=4k+3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

References

[A] G. E. Andrews, *Plane partitions V : the T.S.S.C.P.P conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **66** (1994), 28–39.

[C1] M. A. Ciucu, *Perfect matchings of cellular graphs*, J. Algebraic Combin. **5** (1996), 87– 103.

[C2] ———, *Perfect matchings, spanning trees, plane partitions and statistical physics*, Ph. D. Thesis, Univ. of Michigan (1996).

[EKLP] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132, 219–234.

[JP] W. Jockusch and J. Propp, *Antisymmetric monotone triangles and domino tilings of quartered Aztec diamonds*, preprint.

[KBI] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.

[K] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 139–150.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[MRR1] W. H. Mills, D. P. Robbins, and H. Rumsey. Jr, *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **34** (1983), 340–359.

[MRR2] ———, *Self-complementary totally symmetric plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **42** (1986), 277–292.

[O1] S. Okada, *Partially strict shifted plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990), 143–156.

[O2] ———, *Alternating sign matrices and some defoemations of Weyl's denominator formulas*, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 155-176.

[R] D. P. Robbins, *The Story of* $1, 2, 7, 42, 429, 7436, \ldots$, Math. Intelligencer **13** (1991), 12–19.

[RR] D. P. Robbins and H. Rumsey, Jr, *Determinants and Alternating Sign Matrices*, Adv. in Math. **62** (1986), 169–184.

[T] T. Tokuyama, *A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 671–685.

[Z] D. Zeilberger, *Proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Electron. J. Combin. **3**, (Foata Festschrift), available at `http://www.combinatorics.org`.